V-56 (1 h 25 min) 7-julio-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Proyectores** **Tensor de curvatura extrínseca**

En R^3: Proyector de un vector respecto a dirección ortogonal de cierto vector unitario

Se trata de encontrar la componente de un vector $\vec{v}$ que sea perpendicular a la dirección de un vector unitario $\vec{n}$.
Será la resta vectorial del vector menos su componente en la dirección de n: $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - [\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}]\vec{\boldsymbol{n}}$

$v_m^{\perp}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}} = v_m\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}} - [v_i n_j g_{ij}]n_m\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{m}}$ En R^3 $g_{ij} = \delta_{ij}$ y cada componente quedará: $v_m^{\perp} = v_m - [v_i n_i]n_m$

Para sacar v_i factor común utilizamos el truco $v_m = \delta_{mi}v_i$ y ponemos: $v_m^{\perp} = \delta_{mi}v_i - v_i n_i n_m$ queda:

$\boldsymbol{v_m^{\perp} = (\delta_{mi} - n_m n_i)v_i}$ (sumatorio sobre índice i) Llamamos Proyector a la matriz $\boldsymbol{P_{mi} = (\delta_{mi} - n_m n_i)}$ **(I)**

En forma matricial será: $$\begin{pmatrix} v_1^{\perp} \\ v_2^{\perp} \\ v_3^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - n_1n_1 & -n_1n_2 & -n_1n_3 \\ -n_2n_1 & 1 - n_2n_2 & -n_2n_3 \\ -n_3n_1 & -n_3n_2 & 1 - n_3n_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{v_m^{\perp} = P_{mi}v_i}$$

En cualquier variedad: Proyector de un vector respecto a dirección ortogonal de cierto vector unitario

Exactamente igual que antes haremos $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp} = \vec{\boldsymbol{v}} - [\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}]\vec{\boldsymbol{n}}$ y podemos encontrar una matriz que al actuar sobre la matriz columna de, $\vec{v}$ se obtenga la matriz columna de $\vec{\boldsymbol{v}}^{\perp}$

Ahora tendremos en cuenta que la métrica $\boldsymbol{g_{\alpha\beta}}$ no tiene por qué ser δ_{ij} y, además utilizaremos letras griegas para índices, teniendo en cuenta si está "arriba o abajo" (en R^3, al ser la métrica δ_{ij}, las componentes covariantes y contravariantes eran iguales).

$v_{\perp}^{\mu}\underline{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}} = v^{\mu}\underline{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}} - [v^{\alpha}n^{\beta}g_{\alpha\beta}]n^{\mu}\underline{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}}$ El corchete es un número (producto escalar) y con la métrica bajamos índice

$v_{\perp}^{\mu}\underline{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}} = (v^{\mu} - [v^{\alpha}n_{\alpha}]n^{\mu})\underline{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}}$ Cada componente quedará: $v_{\perp}^{\mu} = v^{\mu} - [v^{\alpha}n_{\alpha}]n^{\mu}$

Para sacar factor común v^{α} utilizamos el truco $v^{\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu}v^{\alpha}$ y ponemos: $v_{\perp}^{\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu}v^{\alpha} - v^{\alpha}n_{\alpha}n^{\mu}$ queda:

$\boldsymbol{v_{\perp}^{\mu} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - n^{\mu}n_{\alpha})v^{\alpha}}$ Llamamos Proyector a la matriz $\boldsymbol{P_{\alpha}^{\mu} = h_{\alpha}^{\mu} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - n^{\mu}n_{\alpha})}$ **(II)**

En forma matricial sería similar a lo puesto en R^3, pero los índices $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ tomarían valores: 0, 1, 2, 3,…

En **(II)** hemos llamado $\boldsymbol{h_{\alpha}^{\mu}}$ al proyector por la siguiente razón: En (IV) de video 55 vimos que la métrica transversa de una hipersuperficie es $\boldsymbol{h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_{\alpha}n_{\beta}}$.
La métrica transversa con un índice arriba es un proyector, como podemos ver subiendo un índice:

$h_{\alpha}^{\mu} = h_{\alpha\beta} \cdot g^{\beta\mu} = (g_{\alpha\beta} - n_{\alpha}n_{\beta})g^{\beta\mu} = g_{\alpha\beta}g^{\beta\mu} - n_{\alpha}n_{\beta}g^{\beta\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu} - n_{\alpha}n^{\mu}$ (producto de matrices $g_{\alpha\beta}g^{\beta\mu}$da la identidad)

Aplicación de Proyector a tensor $\overline{T} = T^{\mu\nu}[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}}]$
Definimos el tensor ortogonal respecto a vector unitario $\boldsymbol{n}$: $\overline{T}_{\perp} = T^{\mu\nu}[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}^{\perp}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}}^{\perp}]$

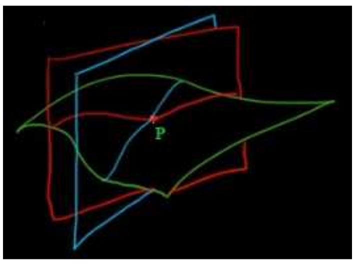
Aplicamos **(II)** a los vectores de la base (solo tienen una componente): $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\mu}}^{\perp} = h_{\mu}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}$ y $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\nu}}^{\perp} = h_{\nu}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}}$

$\overline{T}_{\perp} = T^{\mu\nu}\left[h_{\mu}^{\beta}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}\otimes h_{\nu}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}}\right] \Rightarrow \overline{T}_{\perp} = T^{\mu\nu}h_{\mu}^{\beta}h_{\nu}^{\alpha}[\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\beta}}\otimes\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}}]$ Componentes del tensor ortogonal: $\boldsymbol{T_{\perp}^{\alpha\beta} = T^{\mu\nu}h_{\mu}^{\beta}h_{\nu}^{\alpha}}$

Renombrando índices, si las componentes de un tensor son $T^{\mu\nu}$, ó con índice abajo $T_{\mu\nu}$, las componentes de los tensores ortogonales a $\boldsymbol{n}$ serán:

$\boldsymbol{T_{\perp}^{\mu\nu} = h_{\alpha}^{\mu}h_{\beta}^{\nu}T^{\alpha\beta}}$ ó $\boldsymbol{T_{\mu\nu}^{\perp} = h_{\mu}^{\alpha}h_{\nu}^{\beta}T_{\alpha\beta}}$ **(III)**

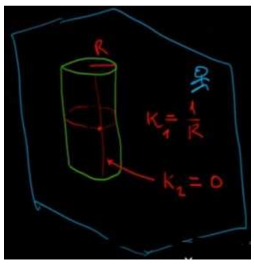
Curvatura extrínseca de una variedad es la que se observa desde un espacio-ambiente que contiene a la variedad
La curvatura intrínseca (tensor de Riemann) es la que se observa desde la propia variedad.
La curvatura extrínseca podría definirse como $K = \frac{1}{R} = |\vec{a}_n|$ cuando $v = 1$



En cada punto P de la variedad hay muchas curvaturas (dependiendo del plano de corte), pero siempre habrá una máxima K_1 y otra mínima K_2.

Por ejemplo en la superficie (2D) cilíndrica inmersa en espacio-ambiente R^3, un observador de dicho espacio ambiente observa en cualquier punto

$K_1=1/R$ y $K_2=1/\infty=0$



<u>Un tensor de curvatura externa</u> debe ser diagonalizable y tener como valores propios K_1 y K_2. Sabemos que el determinante, y también la traza de una matriz (tensor de orden 2) es independiente de la base Se considerará como <u>curvatura en un punto de la variedad la Traza del tensor $K = (K_1 + K_2)$ o dividiendo para hallar el valor medio</u>.

Consideremos R^3 y superficie inmersa en ese espacio, y el vector unitario $\vec{\boldsymbol{n}} = n_j \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}}$ normal a la superficie.
Para detectar curvatura en un punto hallamos las derivadas de $\vec{\boldsymbol{n}}$ respecto a cada coordenada $\boldsymbol{x}^i$:

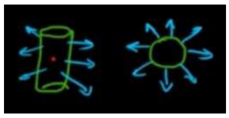
$$\frac{\partial n_j}{\partial x^i} \equiv \boldsymbol{\partial_i n_j} = B_{ij} = \begin{pmatrix} \partial_1 n_1 & \partial_1 n_2 & \partial_1 n_3 \\ \partial_2 n_1 & \partial_2 n_2 & \partial_2 n_3 \\ \partial_3 n_1 & \partial_3 n_2 & \partial_3 n_3 \end{pmatrix} \qquad \text{obtenemos una matriz (tensor de orden 2 en } R^3\text{)}$$

Ese tensor detecta los cambios de $\vec{\boldsymbol{n}}$ en todas direcciones y, por lo tanto, también en la dirección normal a la superficie (dirección de $\vec{\boldsymbol{n}}$). Aunque en este caso de R^3, al ser $\vec{\boldsymbol{n}}$ unitario, no hay variación en su propia dirección y no es necesario proyectar el tensor para que detecte cambios sólo en la superficie, lo debemos hacer para aplicar el método a casos más generales. Así utilizamos **(III)** para <u>proyectar el tensor en dirección ortogonal a $\vec{\boldsymbol{n}}$</u> (plano tangente a superficie)**.** Esta proyección la definimos como <u>tensor de curvatura</u>, que en R^3 y al ser $g_{ij} = \delta_{ij}$ da igual poner índices arriba o abajo:

$$B^{\perp}_{ij} = h_i^k h_j^p B_{kp} = h_i^k h_j^p (\partial_k n_p) \;\rightarrow\; \boldsymbol{K_{ij} = h_i^k h_j^p (\partial_k n_p)} \qquad \boldsymbol{K = Traza\ de K_{ij}} \qquad \textbf{(IV)}$$

<u>Ejemplo:</u> utilizamos el tensor para comprobar la curvatura extrínseca del cilindro

Si su eje coincide con el eje Z, los vectores normales a la superficie y unitarios serán:



$$\vec{n} = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}} + \frac{y}{x^2+y^2}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \quad \text{siendo } R^2 = x^2 + y^2 \;\; \longrightarrow n_1 = \frac{x}{R^2}\ ;\ n_2 = \frac{y}{R^2}\ ;\ n_3 = 0$$

Para aplicar **(IV)** hallamos las derivadas: $(\partial_k n_p) = \begin{pmatrix} \partial_1 n_1 = \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{R^3}} & \partial_1 n_2 = \frac{\boldsymbol{-xy}}{\boldsymbol{R^3}} & \partial_1 n_3 = 0 \\ \partial_2 n_1 = \frac{\boldsymbol{-xy}}{\boldsymbol{R^3}} & \partial_2 n_2 = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{R^3}} & \partial_2 n_3 = 0 \\ \partial_3 n_1 = 0 & \partial_3 n_2 = 0 & \partial_3 n_3 = 0 \end{pmatrix}$

Los proyectores necesarios $\boldsymbol{h_\alpha^\mu = (\delta_\alpha^\mu - n^\mu n_\alpha)}$ son:

$\boldsymbol{h_1^1} = (\delta_1^1 - n^1 n_1) = \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{R^4}}$; $\quad \boldsymbol{h_1^2 = h_2^1} = (\delta_1^2 - n^2 n_1) = \left(0 - \frac{x}{R^2}\cdot\frac{y}{R^2}\right) = -\frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{R^4}}$; $\quad \boldsymbol{h_2^2} = (\delta_2^2 - n^2 n_2) == \boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{R^4}}$

Las componentes, no nulas, de la matriz de curvatura $\boldsymbol{K_{ij} = h_i^k h_j^p (\partial_k n_p)}$ serán:

$$K_{11} = h_1^1 h_1^1(\partial_1 n_1) + h_1^1 h_1^2(\partial_1 n_2) + h_1^2 h_1^1(\partial_2 n_1) + h_1^2 h_1^2(\partial_2 n_2) = \left(1 - \frac{x^2}{R^4}\right)^2 \frac{y^2}{R^3} + 2\left(1 - \frac{x^2}{R^4}\right)\left(\frac{xy}{R^4}\right)\frac{xy}{R^3} + \left(\frac{xy}{R^4}\right)^2 \frac{x^2}{R^3} = \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{R^3}}$$

$$K_{12} = h_1^1 h_2^1(\partial_1 n_1) + h_1^1 h_2^2(\partial_1 n_2) + h_1^2 h_2^1(\partial_2 n_1) + h_1^2 h_2^2(\partial_2 n_2) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{R^3}}$$

$$K_{21} = h_2^1 h_1^1(\partial_1 n_1) + h_2^1 h_1^2(\partial_1 n_2) + h_2^2 h_1^1(\partial_2 n_1) + h_2^2 h_1^2(\partial_2 n_2) = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{\boldsymbol{xy}}{\boldsymbol{R^3}}$$

$$K_{22} = h_2^1 h_2^1(\partial_1 n_1) + h_2^1 h_2^2(\partial_1 n_2) + h_2^2 h_2^1(\partial_2 n_1) + h_2^2 h_2^2(\partial_2 n_2) = \left(\frac{xy}{R^4}\right)^2 \frac{y^2}{R^3} + 2\left(\frac{xy}{R^4}\right)\left(1 - \frac{y^2}{R^4}\right)\frac{xy}{R^3} + \left(1 - \frac{y^2}{R^4}\right)^2 \frac{x^2}{R^3} = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{R^3}}$$

La Traza del tensor es la curvatura total: $K = K_{11} + K_{22} = \frac{y^2}{R^3} + \frac{x^2}{R^3} = \frac{y^2+x^2}{R^3} = \frac{R^2}{R^3} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R}}$ como se esperaba

Visto tensor de curvatura extrínseco en superficie 2D inmersa en R^3, generalizamos a cualquier variedad inmersa en otra mayor (la métrica no es $g_{ij} = \delta_{ij}$, los Christofels son $\neq 0$). Utilizaremos índices griegos, será importante colocarlos arriba ó abajo y, además, la derivada parcial se sustituye por la derivada covariante:

$$\boldsymbol{K_{\mu\nu} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\nabla_\alpha n_\beta)} \qquad \boldsymbol{K = Traza\ de K_{\mu\nu}} \qquad \textbf{(V)}$$

<u>Otra forma de expresar el tensor de curvatura extrínseca, en función de las componentes del vector normal</u>

$$\boldsymbol{K_{\mu\nu}} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta (\boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta}) = (\delta_\mu^\alpha - n^\alpha n_\mu)(\delta_\nu^\beta - n^\beta n_\nu)\boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta} = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta} - \delta_\mu^\alpha n^\beta n_\nu \boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta} - n^\alpha n_\mu \delta_\nu^\beta \boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta} + n^\alpha n_\mu n^\beta n_\nu \boldsymbol{\nabla_\alpha n_\beta} =$$

$$= \boldsymbol{\nabla_\mu n_\nu} - n^\beta n_\nu \boldsymbol{\nabla_\mu n_\beta} - n^\alpha n_\mu\, \boldsymbol{\nabla_\alpha n_\nu} + n^\alpha n_\mu n_\nu \cancel{\boldsymbol{n^\beta \nabla_\alpha n_\beta}}$$ (Se demuestra fácil <u>propiedad:</u> si $\underline{\boldsymbol{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{n^\beta \nabla_\alpha n_\beta = 0}$)

Según esa propiedad el tensor de curvatura extrínseca es: $\boldsymbol{K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu - n^\alpha n_\mu\, \nabla_\alpha n_\nu}$ **(VI)**

La Traza (curvatura total) es: $\boldsymbol{Traz\ K_{\mu\nu}} = K_{11} + K_{22} + \cdots = K_\mu^\mu = \boldsymbol{g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu}(\boldsymbol{\nabla_\mu n_\nu - n^\alpha n_\mu\, \nabla_\alpha n_\nu})$

$= \nabla_\mu(g^{\mu\nu} n_\nu) - n^\alpha (g^{\mu\nu} n_\mu)\, \nabla_\alpha n_\nu = \nabla_\mu n^\mu - n^\alpha(\cancel{n^\nu \nabla_\alpha n_\nu}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{K = Traz\ K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu}$ **(VII)**

(Divergencia covariante)